TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Henri Mühle Wintersemester 2017/18

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Geordnete Mengen in Hyperebenenarrangements"

Halbordnungen und Verbände

Ü1. Sei $(P, \leqslant)$ eine endliche geordnete Menge mit kleinstem Element $\hat{0}$, sodass für je zwei Elemente $x, y \in P$ eine kleinste obere Schranke $x \vee y$ existiert. Zeigen Sie, dass $(P, \leqslant)$ ein Verband ist.

Ü2. Beweisen Sie das folgende Prinzip von Inklusion und Exklusion.

> Sei X eine endliche Menge, und sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ eine Familie von Teilmengen von X. Für $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$. Die Anzahl der Elemente, die in keiner der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ liegt ist gerade
>
> $$\sum_{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{\#J} \, \#A_J.$$

Hinweis: Verwenden Sie Möbius-Inversion.

Ü3. Beweisen Sie Satz 0.10.

> Sei $(P, \leqslant)$ eine endliche, beschränkte geordnete Menge mit $\#P \geqslant 2$. Es bezeichne c_i die Anzahl aller Ketten $\hat{0} = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = \hat{1}$ der Länge i. Dann gilt
>
> $$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{i \geqslant 1} (-1)^i c_i.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Inzidenzalgebra.

Ü4. Beweisen Sie Satz 0.15.

> Sei $(L, \leqslant)$ ein endlicher Verband mit $\#L \geqslant 2$, und sei $a \in L \backslash \{\hat{0}\}$. Dann gilt
>
> $$\sum_{x \in L : x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Möbiusalgebra.

Ü5. Beweisen Sie Satz 0.16.

Sei $(L, \leqslant)$ ein endlicher Verband, und sei $z \in L$. Dann gilt

$$\sigma_{\hat{0}} = \left(\sum_{v \in L : v \leqslant z} \mu(\hat{0}, v) v \right) \left(\sum_{y \in L : y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y) y \right).$$

Ü6. Zeigen Sie, dass ein endlicher gradierter Verband $(L, \leqslant)$ genau dann submodular ist, wenn er die folgende Bedingung erfüllt:

Für alle $x, y \in L$ gilt, dass aus $x \wedge y \lessdot x$ stets $y \lessdot x \vee y$ folgt.

Ü7. Finden Sie je einen Verband, der

- atomar, aber nicht submodular ist;
- submodular, aber nicht atomar ist;
- weder submodular, noch atomar ist;
- atomar ist, aber ein nicht-atomares Intervall enthält.

Ü8. Zeigen Sie, dass jedes Intervall eines geometrischen Verbandes wieder ein geometrischer Verband ist.