Henri Mühle Wintersemester 2017/18

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Geordnete Mengen in Hyperebenenarrangements"

Matroide

Sei S eine endliche Menge, und sei $\mathcal{I} \subseteq \wp(S)$ eine Familie von Teilmengen von S. Das Paar $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ heißt MATROID, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\mathcal{I} \neq \emptyset; \tag{I1}$$
$$\text{Wenn } J \in \mathcal{I} \text{ und } I \subseteq J, \text{ dann ist auch } I \in \mathcal{I}; \tag{I2}$$
$$\text{Für } I, J \in \mathcal{I} \text{ mit } \#I < \#J \text{ gibt es } x \in J \backslash I \text{ sodass } I \cup \{x\} \in \mathcal{I}. \tag{I3}$$

Die Elemente von $\mathcal{I}$ heißen UNABHÄNGIGE MENGEN, und die maximalen Elemente von $\mathcal{I}$ heißen BASEN.

Ü16. Sei $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ ein Matroid.

(a) Zeigen Sie, dass alle Basen von $\mathcal{M}$ die gleiche Kardinalität haben.

(b) Zeigen Sie, dass das folgende Austauschaxiom gilt:

> Für zwei Basen B_1 und B_2 von $\mathcal{M}$, und jedes $x \in B_1 \backslash B_2$ gibt es ein $y \in B_2 \backslash B_1$, sodass $\bigl(B_1 \backslash \{x\}\bigr) \cup \{y\}$ wieder eine Basis ist.

Ü17. Eine Funktion $r : \wp(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$ heißt MATROIDALE RANGFUNKTION, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\text{Für alle } I \subseteq S \text{ gilt } 0 \leqslant r(I) \leqslant \#I; \tag{R1}$$
$$\text{Für } I \subseteq J \subseteq S \text{ gilt } r(I) \leqslant r(J); \tag{R2}$$
$$\text{Für alle } I, J \subseteq S \text{ gilt } r(I) + r(J) \geqslant r(I \cap J) + r(I \cup J). \tag{R3}$$

(a) Sei $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ ein Matroid, und sei $r : \wp(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$J \longmapsto \max\{\#K \mid K \in \mathcal{I} \text{ mit } K \subseteq J\}.$$

Zeigen Sie, dass r eine matroidale Rangfunktion ist.

(b) Sei $r : \wp(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine matroidale Rangfunktion, und sei $c : \wp(S) \longrightarrow \wp(S)$ gegeben durch

$$J \longmapsto \bigl\{x \in S \mid r\bigl(J \cup \{x\}\bigr) = r(J)\bigr\}.$$

Zeigen Sie, dass c ein Hüllenoperator (also extensiv, monoton und idempotent) ist, und dass $r\bigl(c(I)\bigr) = r(I)$ gilt.

(c) Sei $r : \wp(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine matroidale Rangfunktion, und sei $\mathcal{I} = \{I \subseteq S \mid r(I) = \#I\}$. Zeigen Sie, dass $(S, \mathcal{I})$ ein Matroid ist.

Ü18. Ein Matroid $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ heißt einfach, wenn $c(\varnothing) = \varnothing$ und $c(\{x\}) = \{x\}$ für alle $x \in S$ gilt. Der Hüllenverband von $\mathcal{M}$ ist $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \big(\{I \subseteq S \mid c(I) = I\}, \subseteq\big)$.

(a) Betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$ auf S, gegeben durch $x \sim y$ genau dann, wenn $c(\{x\}) = c(\{y\})$. Sei $\hat{S} = \{c(\{x\}) \mid x \in S\}$, und definiere

$$\hat{\mathcal{I}} = \Big\{\{c(\{x_1\}), c(\{x_2\}), \ldots, c(\{x_k\})\} \mid \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathcal{I}\Big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{S}, \hat{\mathcal{I}})$ ein einfaches Matroid ist, und dass $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cong \mathcal{L}(\hat{\mathcal{M}})$ gilt.

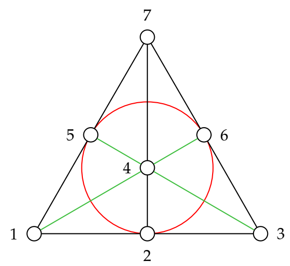
(b) Zeigen Sie, dass ein endlicher Verband $\mathcal{L}$ genau dann geometrisch ist, wenn $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(\mathcal{M})$ für ein einfaches Matroid $\mathcal{M}$ gilt.

Ü19. Sei $\mathcal{A} \in \mathrm{Hyp}(\mathbf{V})$ ein zentrales Hyperebenenarrangement. Wir definieren

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{B} \text{ ist linear unabhängig}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ ein einfaches Matroid ist, und dass $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ gilt.

Ü20. Es sei das folgende Diagramm gegeben.



Eine Teilmenge der Knoten dieses Diagramms soll abhängig sein, wenn sie drei Punkte enthält, die auf einer gemeinsamen Linie liegen, und unabhängig andernfalls.

Beschreiben Sie das entsprechende Matroid, und zeichnen Sie den zugehörigen Hüllenverband. Was ändert sich, wenn die rote Linie entfernt wird? Was ändert sich, wenn die beiden grünen Linien entfernt werden?